

**Общество с ограниченной ответственностью «ЦЕНТР ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ»**

(ООО «Центр образовательных технологий»)

ИНН 0600023803 ОГРН 1260600000913

386231, Республика Ингушетия, г. Карабулак, ул. Дьякова, д. 108

Демонстрационные доски

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа
«Тригонометрия. Базовый курс» для дистанционного обучения

г. Карабулак

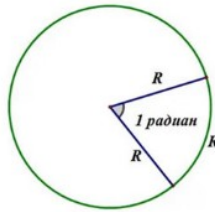
2026

Радийанная мера угла (1ч)

Радийанная мера — это естественный способ измерения углов, который связывает величину угла с геометрией окружности.

1. Определение радиана

Радян — это величина центрального угла, который опирается на дугу окружности, длина которой в точности равна её радиусу.



- Так как длина всей окружности равна $2\pi R$, то полный оборот в 360° соответствует 2π радиан.
- Отсюда следует ключевое равенство: $180^\circ = \pi$ радиан.
- Примерное значение 1 радиана: $1 \text{ рад} \approx 57,3^\circ$.

2. Формулы перевода

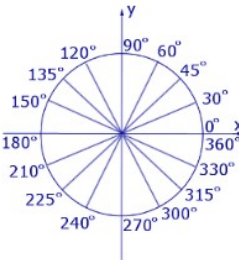
Для перевода величин используйте следующие зависимости:

- Из градусов в радианы:

$$\alpha_{\text{рад}} = \alpha_{\text{град}} \cdot \frac{\pi}{180}$$

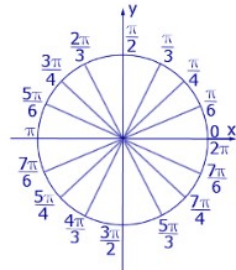
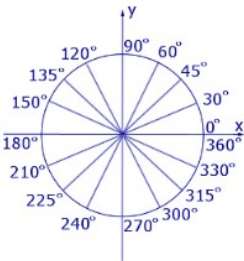
- Из радиан в градусы:

$$\alpha_{\text{град}} = \alpha_{\text{рад}} \cdot \frac{180}{\pi}$$



3. Таблица и тригонометрический круг

Для быстрой работы в тригонометрии основные углы лучше запомнить наизусть. Ниже представлены соответствия на единичной окружности:



4. Практические задания

Задание 1. Перевод в радианы

Выразите в радианах угол 150° .

- Подстановка:** Используем формулу $\alpha_{\text{рад}} = \alpha_{\text{град}} \cdot \frac{\pi}{180}$.
- Расчёт:** $150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{150\pi}{180}$.
- Сокращение:** Делим числитель и знаменатель на 30.
1. **Ответ:** $\frac{5\pi}{6}$ радиан.

Задание 2. Перевод в градусы

Переведите в градусную меру угол $\frac{2\pi}{5}$ радиан.

- Подстановка:** Используем формулу $\alpha_{\text{рад}} = \alpha_{\text{град}} \cdot \frac{\pi}{180}$.
- Расчёт:** $\frac{2\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{2 \cdot 180}{5} = \frac{360}{5}$.
1. **Ответ:** 72° .

Задание 3. Длина дуги (физика/геометрия)

Найдите длину дуги окружности радиусом 10 см, если центральный угол равен $1,5$ радиана.

- Формула:** Длина дуги $l = \alpha \cdot R$, где α — угол только в радианах.
- Расчёт:** $l = 1,5 \cdot 10 = 15$ (см).
1. **Ответ:** 15 см.

Часть 1. Перевод из градусов в радианы

Выразите величину угла в радианах (ответ оставьте с числом π):

- 40°
- 120°
- 210°
- 300°
- 15°

Часть 2. Перевод из радиан в градусы

Найдите градусную меру угла:

- $\frac{\pi}{12}$
- $\frac{3\pi}{4}$
- $\frac{5\pi}{3}$
- $\frac{7\pi}{6}$
- 3π

Часть 3. Прикладные задачи и «хитрые» значения

- Найдите длину дуги окружности радиусом 6 см, если центральный угол равен $\frac{2\pi}{3}$.
- Какой длины дугу описывает минутная стрелка длиной 10 см за 20 минут?
- Переведите в градусы угол в 2 радиана (используйте $\pi \approx 3,14$, ответ округлите до целых).
- Определите, в какой четверти тригонометрического круга находится угол $2,5$ радиана.
- Сравните два угла: $\frac{\pi}{2}$ и 1,6 радиана. Какой из них больше?

Часть 4. Продвинутая практика

Выразите в радианах (через π):

- 135°
- -240° (отрицательный угол)
- 540° (угол больше круга)

Переведите в градусы:

- $\frac{11\pi}{6}$
- $-\frac{3\pi}{2}$
- 5 радиан (округлите до десятых, $\pi \approx 3,14$)

Зависимость между синусом и косинусом одного и того же угла (2ч)

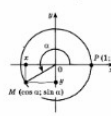


Рис. 63

Выясним зависимость между синусом и косинусом.

Пусть точка $M(x; y)$ единичной окружности получена поворотом точки $(1; 0)$ на угол α (рис. 63). Тогда по определению синуса и косинуса

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha.$$

Точка M принадлежит единичной окружности, поэтому ее координаты $(x; y)$ удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Следовательно,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

Равенство (1) выполняется при любых значениях α и называется основным тригонометрическим тождеством.

Из равенства (1) можно выразить $\sin \alpha$ через $\cos \alpha$ и $\cos \alpha$ через $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad (2)$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (3)$$

В этих формулах знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

Задача 1 Вычислить $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Задача 2 Вычислить $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

Выясним теперь зависимость между тангенсом и котангенсом. По определению тангенса и котангенса $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Перепишем эти равенства, выразив

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha, \quad (4)$$

Из равенства (4) можно выразить $\operatorname{tg} \alpha$ через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (5)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (6)$$

Равенства (4)–(6) справедливы при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 3 Вычислить $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = 12$.

Задача 4 Вычислить $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = 0,8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Используя основное тригонометрическое тождество и определение тангенса, найдем зависимость между тангенсом и котангенсом. Решив обе части равенства $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ на $\cos^2 \alpha$, приходим к тому, что $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$. Получим равенство $\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, откуда

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \quad (7)$$

Эта формула верна, если $\cos \alpha \neq 0$, т.е. при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Но она может выполняться также через косинус и косинус через тангенс.

Задача 5 Вычислить $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Задача 6 Вычислить $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

456 Может ли синус (косинус) принимать значения:

$$0,03, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{11}{13}, \quad -\frac{19}{11}, \quad \sqrt{2}?$$

457 Могут ли одновременно выполняться равенства:

$$1) \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ и } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$2) \sin \alpha = -\frac{4}{5} \text{ и } \cos \alpha = -\frac{3}{5};$$

$$3) \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } \cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{5};$$

$$4) \sin \alpha = 0,2 \text{ и } \cos \alpha = 0,8?$$

460 Какие значения может принимать:

$$1) \cos \alpha, \text{ если } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5};$$

$$2) \sin \alpha, \text{ если } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$3) \sin \alpha, \text{ если } \cos \alpha = \frac{2}{3};$$

$$4) \cos \alpha, \text{ если } \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}?$$

461 Могут ли одновременно выполняться равенства:

$$1) \sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ и } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}; \quad 2) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{17}}{3} \text{ и } \cos \alpha = \frac{3}{4}?$$

462 Пусть α — один из углов прямоугольного треугольника.

Найти $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$.

459 Вычислить значение каждой из тригонометрических функций, если:

$$1) \cos \alpha = \frac{5}{13} \text{ и } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi; \quad 2) \sin \alpha = 0,8 \text{ и } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8} \text{ и } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \quad 4) \operatorname{ctg} \alpha = -3 \text{ и } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi;$$

$$5) \cos \alpha = 0,8 \text{ и } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad 6) \sin \alpha = -\frac{3}{19} \text{ и } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi;$$

$$7) \operatorname{tg} \alpha = -2,4 \text{ и } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \quad 8) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24} \text{ и } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$$

463 Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Найти значение выражения:

$$1) \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha; \quad 2) \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha};$$

$$3) \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}; \quad 4) \frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}.$$

464 Известно, что $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$. Найти:

$$1) \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad 2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha.$$

Тема: Зависимость между синусом и косинусом одного и того же угла

Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$. (2ч)

Пусть точки M_1 и M_2 единичной окружности получены поворотом точки $P(1; 0)$ на углы α и $-\alpha$ соответственно (рис. 64). Тогда ось Ox делит угол M_1OM_2 пополам, и поэтому точки M_1 и M_2 симметричны относительно оси Ox . Абсциссы этих точек совпадают, а ординаты отличаются только знаками. Точка M_1 имеет координаты $(\cos \alpha; \sin \alpha)$, точка M_2 имеет координаты $(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$. Следовательно,

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad (1)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha. \quad (2)$$

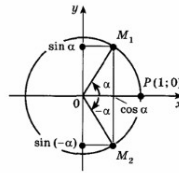


Рис. 64

Используя определение тангенса, получаем

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Формулы (1) — (2) справедливы при любых α , а формула (3) — при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Можно показать, что если $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Формулы (1) — (3) позволяют сводить вычисление значений синуса, косинуса и тангенса отрицательных углов к вычислению их значений для положительных углов. Например,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

478 Упростить выражение:

$$1) \frac{\sin^3(-\alpha) + \cos^3(-\alpha)}{1 - \sin(-\alpha) \cos(-\alpha)}; \quad 2) \frac{1 - (\sin \alpha + \cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}.$$

479 Доказать тождество:

$$1) \cos \alpha \sin(6\pi - \alpha) \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2(-\alpha)) = \operatorname{ctg}(-\alpha);$$

$$2) \frac{1 - \sin^2(-\alpha)}{\cos(4\pi - \alpha)} \cdot \frac{\sin(\alpha - 2\pi)}{1 - \cos^2(-\alpha)} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

475 Вычислить:

$$1) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right); \quad 2) \frac{1 + \operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1 + \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)};$$

$$3) 2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$4) \cos(-\pi) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$5) \frac{3 - \sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{9}\right)}{2 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)};$$

$$6) 2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3 + 7,5 \operatorname{tg}(-\pi) + \frac{1}{8} \cos \frac{3}{2}\pi.$$

480 Решить уравнение:

$$1) \sin(-x) = 1; \quad 2) \cos(-2x) = 0;$$

$$3) \cos(-2x) = 1; \quad 4) \sin(-2x) = 0;$$

$$5) \cos^2(-x) + \sin(-x) = 2 - \sin^2 x;$$

$$6) 1 - \sin^2(-x) + \cos(4\pi - x) = \cos(x - 2\pi).$$

Тема: Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$