

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по выполнению внеаудиторной работы при реализации программы дополнительного
общеобразовательного образования

«Тригонометрия. Базовый курс»

г. Карабулак

2026

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Тригонометрия. Базовый курс» представляет собой комплексную образовательную программу, направленную на систематизацию знаний в области тригонометрических функций, уравнений и неравенств. Актуальность данного курса обусловлена высокой долей тригонометрических задач в контрольно-измерительных материалах государственных экзаменов и их значимостью для дальнейшего изучения высшей математики.

Цель документа

Обеспечить переход базового понимания тригонометрических определений к уверенному владению методами решения задач повышенной сложности.

Задачи документа

1. Систематизация подходов к организации различных видов учебной деятельности.
2. Стандартизация требований к решению тригонометрических уравнений.
3. Унификация критериев оценивания.
4. Обеспечение преемственности между различными этапами обучения.
5. Подготовка к решению задач профильного уровня.
6. Минимизация типичных ошибок.

Особенности этапа обучения

Данный этап является завершающим периодом и характеризуется:

1. Интеграция навыков.
2. Автоматизация экспертных навыков.
3. Контрольно-диагностическая деятельность.
4. Психологическая адаптация.

Структура документа

Каждый раздел содержит:

- рекомендации для преподавателя (цели, планируемые результаты, методические советы);
- рекомендации для обучающихся (алгоритмы действий, памятки, стратегии выполнения);
- примеры заданий с образцами выполнения;
- критерии оценивания в табличной форме.

Принципы построения

1. Принцип системности — логическая связь между разделами.
2. Принцип практической направленности — ориентация на реальные учебные задачи.
3. Принцип доступности — учет возрастных особенностей.
4. Принцип объективности — четкие измеримые критерии.
5. Принцип преемственности — связь с предыдущими уровнями.

1 ВХОДНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ

1.1. Рекомендации для преподавателя

Цели проведения:

- Диагностика «фундамента»: проверка навыков работы с рациональными числами, пропорциями и свойствами фигур.
- Выявление индивидуальных дефицитов в области элементарной геометрии.

Планируемые результаты:

- Обучающийся демонстрирует знание теоремы Пифагора и определений синуса/косинуса в прямоугольном треугольнике.
- Преподаватель получает карту «рисков» группы для корректировки темпа первого модуля.

Методические рекомендации:

1. Проводите тест в первые 15–20 минут первого занятия.
2. Важно: объявите, что результаты не влияют на итоговую оценку, а нужны для «настройки» курса под них.
3. Используйте задания с кратким ответом, чтобы не тратить время на проверку оформления.

1.2. Рекомендации для обучающихся

Как подготовиться к тестированию:

- Вспомните определения из 8 класса: что такое катет, гипотенуза и теорема Пифагора.
- Повторите работу с обыкновенными дробями (сокращение, приведение к общему знаменателю).
- Не нужно учить тригонометрические формулы заранее — тест проверяет только ваш текущий фундамент.

Как выполнять эту работу:

- Двигайтесь от простых задач к сложным. Если задача требует длинных вычислений — отложите её.
- Всегда делайте схематичный чертеж к геометрическим задачам.

1.3. Пример задания и образец выполнения

Тема: "Входной тест на косинус"

- **Задание:** В треугольнике ABC угол $C = 90^\circ$, $BC = 8$, $AB = 10$. Найдите $\cos B$.
- **Образец выполнения:**
 - Косинус — это отношение прилежащего катета к гипотенузе.
 - Для угла B прилежащий катет — это BC .
 - $\cos B = BC/AB = 8/10 = 0,8$.
- **Ответ:** 0,8.

1.4. Критерии оценивания

Оценка	Процент выполнения	Характеристика выполнения
5	90-100%	Все задания выполнены правильно, допущена 1 негрубая ошибка
4	75-89%	Допущено 2-3 ошибки, формулы указаны
3	60-74%	Выполнено более половины заданий, есть пробелы в знаниях
2	менее 60%	Большая часть заданий выполнена неправильно

Дополнительные критерии:

Показатель	Снижение балла
Небрежное оформление	- 0,5 балла
Несоблюдение нумерации	- 0,5 балла
Исправления (более 3)	- 0,5 балла
Орфографические ошибки в ответах	- 1 балл

2 ЛЕТУЧКИ (ПЯТИМИНУТКИ, п)

2.1. Рекомендации для преподавателя

Цели проведения:

- Автоматизация навыка: Перевод процесса поиска значений из стадии «мучительных раздумий» в стадию мгновенной реакции.
- Визуализация: Закрепление образа единичной окружности как основного навигационного инструмента.
- Актуализация: Быстрая подготовка мозга к решению более сложных уравнений в начале урока.

Планируемые результаты:

- Предметные: Ученик за 5–10 секунд находит точку на круге, определяет её градусную/радианную меру и соотносит с осями координат.
- Метапредметные: Повышение скорости переработки информации и концентрации внимания.

Методические рекомендации:

- Регулярность: проводить каждое занятие в первые 5 минут.
- Инструментарий: раздайте ученикам заготовки — листы с 4–6 пустыми кругами (без подписей осей и делений).
- Темп: диктуйте задания быстро. Между заданиями — пауза не более 15–20 секунд.
- Эффект неожиданности: чередуйте радианы градусы и отрицательные углы.

2.2. Рекомендации для обучающихся

Как подготовиться:

Дома «набейте руку»: рисуйте круг и отмечайте на нем «семью» П/6 (горизонтальные), П/3 (вертикальные) и П/4 (диагональные).

Запомните: Косинус — это «Х» (горизонталь), Синус — это «Y» (вертикаль).

Как выполнять (Алгоритм работы):

Шаг 1: Быстро нарисуйте оси.

Шаг 2: Найдите «базовую» точку (в первой четверти).

Шаг 3: Отзеркальте её в нужную четверть.

Шаг 4: Спроецируйте точку на нужную ось (ОХ или ОУ).

Алгоритм проверки:

Проверка проводится мгновенно после выполнения. Лучше всего — взаимопроверка (ученики меняются листками) или самопроверка по готовому эталону на доске.

2.3. Пример задания и образец выполнения

- **Задание:** Отметить точку $x = \frac{2\pi}{3}$ и найти $\cos x$.
- **Образец:** Ученик рисует круг, отмечает точку во II четверти (чуть левее оси Y), ведет пунктир вниз к оси OX и пишет: $\cos \frac{2\pi}{3} = -0,5$.

2.4. Критерии оценивания

Оценка	Количество ошибок	Характеристика
5	0-1 ошибка	Все точки отмечены верно, все значения вычислены правильно.
4	2-3 ошибки	Точки найдены верно, но допущена одна ошибка в знаке (например, забыт «минус»).
3	4-5 ошибок	Есть понимание расположения точек, но перепутаны оси (вместо синуса найден косинус) или значения
2	6 и более ошибок	Точки отмечены в неверных четвертях.

Шкала пересчета ошибок:

Тип ошибки	Коэффициент
Ошибка в четверти (критическая ошибка).	-2 балла
Ошибка в знаке (+/-)	-1 балл
Ошибка в табличном значении:	-1 балл.
Грязный чертеж (непонятно, где точка)	-0,5 балла

3 ТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОВЕРОЧНЫЕ РАБОТЫ (ПО РАЗДЕЛАМ)

3.1. Рекомендации для преподавателя

Цели проведения:

- Проверка аналитических навыков: оценить умение использовать основные тригонометрические тождества для упрощения выражений.
- Контроль формул приведения: проверить навык перехода от произвольных углов к острым (алгоритм «Четверть — Функция»).
- Диагностика логики: выявить, понимает ли ученик взаимосвязь между функциями

Планируемые результаты:

- Предметные: Ученик безошибочно применяет формулы (основное тождество, формулы двойного угла, формулы приведения) для сокращения дробей и доказательства равенств.
- Метапредметные: Умение преобразовывать информацию из одной формы в другую (алгебраический вывод).

Методические рекомендации:

- Структура: Работа должна состоять из трех блоков: а) вычисление значения, б) упрощение выражения, в) доказательство тождества.
- Вариативность: Дайте два равноценных варианта, чтобы исключить списывание.
- Время: 45 минут (полный академический час)

Виды заданий:

- Вычисление по табличным значениям.
- Нахождение всех функций по одной заданной (с учетом четверти).
- Упрощение выражений через основные тождества.
- Применение формул приведения.
- Использование формул двойного угла.
- Использование формул суммы и разности аргументов.
- Доказательство тождеств.
- Определение знака выражения по четвертям.
- Оценка области значений функции.
- Преобразования с учетом четности/нечетности.

3.2. Рекомендации для обучающихся

Стратегия выполнения:

- По значению функции найди модуль другой функции через основное тригонометрическое тождество.
- Посмотри на заданный интервал угла и выбери знак (+ или -).
- Вычисли тангенс и котангенс через отношение синуса и косинуса.

3.3. Пример задания и образец выполнения

- **Пример задания и образец выполнения:**

- **Задание:** Упростить выражение: $\frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha$.
- **Образец:**
 - Расписываем числитель: $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$.
 - Получаем: $\frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha$.
 - Сокращаем на $\cos \alpha$: $2\sin \alpha - \sin \alpha = \sin \alpha$.
- **Ответ:** $\sin \alpha$.

3.4. Критерии оценивания

Оценка	Критерии
«5» (Отлично)	Решены все задачи. Допускается одна мелкая описка, не влияющая на ход решения.
«4» (Хорошо)	Верно выполнены задания на вычисление и упрощение, но есть ошибки в доказательстве тождества или в знаках формул приведения.
«3» (Удовлетворительно)	Ученик знает базовые формулы, но допускает ошибки в их применении. Решено более 50% работы.
«2» (Неудовлетворительно)	Решено менее половины задач, полное непонимание связи между функциями.

Шкала ошибок

Категория	Проценты
Грубая ошибка (незнание формулы):	- 100% за задание.
Ошибка в формуле приведения (перепутал знак):	- 50% за задание.
Вычислительная ошибка (сложение/умножение):	- 20% за задание.
Пропуск ОДЗ (если требовалось):	- 10% за задание.

4 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

4.1. Рекомендации для преподавателя

Цели проведения:

- Диагностика готовности: оценить способность учащегося решить комплексную задачу (уравнение + отбор корней) в условиях ограниченного времени.
- Проверка стрессоустойчивости: Имитация условий реального экзамена для реализации концепции «Без паники».
- Контроль оформления: проверить соответствие записей строгим критериям ФИПИ.

Планируемые результаты:

- Предметные: Ученик демонстрирует владение методами решения комбинированных уравнений и техникой отбора корней (через круг, неравенство или график).
- Личностные: Формирование навыка тайм-менеджмента и умения адекватно оценивать сложность задачи.

Методические рекомендации:

- Регламент: Жесткий лимит времени — 45 минут.
- Обстановка: Использовать официальные бланки ответов. Запретить использование калькуляторов и любых справочных материалов.
- Варианты: Минимум 2–4 варианта для обеспечения самостоятельности выполнения.

4.2. Рекомендации для обучающихся

Как подготовиться:

- Повторите «запрещенные» приемы (деление на переменную, потерю при извлечении корня).
- Отработайте навык рисования аккуратной окружности для части (б).

Как выполнять (Алгоритм работы):

- Часть (а): Сначала запишите ограничения (ОДЗ), если они есть. Решите уравнение, запишите общую серию корней.
- Часть (б): Нарисуйте круг, выделите дугу жирным, отметьте границы, расставьте точки и подпишите их значения.
- Ответ: Записывайте строго: отдельно для пункта (а) и отдельно для (б).

4.3. Пример задания и образец выполнения

Задание №13 (профильный уровень):

а) Решите уравнение: $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

Образец выполнения

а) Решение:

1. Используем основное тождество: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
2. $2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0 \implies 2 - 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.
3. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.
4. Пусть $\cos x = t$, где $|t| \leq 1$. Уравнение: $2t^2 - t - 1 = 0$.
5. Корни: $t_1 = 1, t_2 = -0,5$.
6. Обратная замена:
 1. $\cos x = 1 \implies x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
 2. $\cos x = -0,5 \implies x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Отбор корней на отрезке $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$:

1. Рисуем окружность. Отмечаем дугу от -2π (крайняя правая точка) до $-\frac{\pi}{2}$ (нижняя точка) против часовой стрелки.
2. Отмечаем точки:
 1. Серия $2\pi n$: попадает точка -2π .
 2. Серия $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$: точка $-2\pi + \frac{2\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$.
 3. Серия $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$: точка $-\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: а) $2\pi n, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$.

4.4. Критерии оценивания

Оценка	Пояснение
«5» (Отлично)	Решены все задачи. Допускается одна мелкая описка, не влияющая на ход решения.
«4» (Хорошо)	Верно выполнены задания на вычисление и упрощение, но есть ошибки в доказательстве тождества или в знаках формул приведения.

«3» (Удовлетворительно)	Ученик знает базовые формулы, но допускает ошибки в их применении. Решено более 50% работы.
«2» (Неудовлетворительно)	Решено менее половины задач, полное непонимание связи между функциями.

Шкала ошибок

Ошибка	Проценты
Грубая ошибка (незнание формулы):	- 100% за задание.
Ошибка в формуле приведения (перепутал знак):	- 50% за задание
Вычислительная ошибка (сложение/умножение):	- 20% за задание
Пропуск ОДЗ (если требовалось):	- 10% за задание.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Общие рекомендации

1. Сделайте тригонометрический круг своим главным инструментом. Не пытайтесь выучить таблицу значений синусов и косинусов наизусть как набор цифр. Всегда держите перед глазами (или рисуйте на черновике) единичную окружность. Учитесь «видеть» на ней значения, знаки функций и точки отбора корней.

2. Соблюдайте последовательность («Принцип пирамиды»). Тригонометрия не прощает пропусков. Не переходите к решению уравнений (Модуль 3), если не до конца разобрались с формулами приведения или радианной мерой угла (Модуль 1). Каждый новый урок базируется на фундаменте предыдущего.

3. Ведите «Справочник вывода формул». Вместо того, чтобы заучивать десятки формул, заведите тетрадь, где вы один раз самостоятельно выведете сложные формулы из базовых. Это создаст в памяти логические связи, которые не подведут в стрессовой ситуации на экзамене.

4. Уделяйте особое внимание ОДЗ. Приучите себя начинать решение любого уравнения с анализа ограничений (например, знаменатель не равен нулю для тангенса или подкоренное выражение неотрицательно). Это позволит избежать потери баллов на финальном этапе.

5. Практикуйте разные методы отбора корней. Не ограничивайтесь только одним способом (например, только окружностью). Попробуйте отбирать корни через двойные неравенства или графики. В сложных задачах умение сменить метод поможет избежать ошибки.

6. Не бойтесь «некрасивых» ответов. В тригонометрии часто встречаются ответы с арксинусами или корнями. Если вы уверены в своем алгоритме, не паникуйте, если ответ не похож на целое число.

7. Регулярность важнее интенсивности. Решайте по 2–3 задачи ежедневно, вместо того чтобы пытаться пройти весь блок за один выходной. Тригонометрическая зоркость (умение видеть нужную формулу в нагромождении функций) нарабатывается только через регулярную практику.

Рекомендации по работе над ошибками

Для повышения качества усвоения материала и минимизации потери баллов учащимся и педагогам рекомендуется использовать следующий алгоритм:

1. Классификация ошибок

Не рассматривайте ошибку как случайность. Разделите её на одну из трех категорий:

– **Концептуальная:** непонимание сути (например, неверное определение знака функции в четверти). Решение: вернуться к теории единичной окружности.

– **Процессуальная:** ошибка в применении формул или методов (например, неверно раскрыт синус двойного угла). Решение: составить карточку-шпаргалку с выводом этой формулы.

– **Техническая:** невнимательность в вычислениях или при переносе знаков. Решение: практиковать метод «встречной проверки» (решение задачи с конца).

2. Анализ «потерянных» корней

Если при решении уравнения часть ответов была потеряна, проверьте:

– Не произошло ли сокращение обеих частей уравнения на переменную без учета возможности её равенства нулю.

– Верно ли учтен период для синуса/косинуса и для тангенса.

3. Анализ «лишних» корней

Если получен ответ, который не совпадает с эталоном, проверьте:

– ОДЗ: не попали ли корни в точки, где функция (например, тангенс) не существует.

– Проверка: подставьте полученное значение в исходное уравнение. В тригонометрии подстановка — самый быстрый способ самопроверки.

4. Работа с тригонометрическим кругом при отборе

Большинство ошибок отбора корней связано с неправильным направлением обхода окружности или неверной отметкой границ отрезка.

Рекомендация: всегда штрихуйте нужную дугу и отмечайте «пустые» и «закрашенные» точки. Если возникает сомнение — дублируйте отбор через двойное неравенство.

5. Ведение «Дневника типичных ловушек»

Записывайте задачи, в которых вы ошиблись более одного раза. Как правило, у каждого ученика есть «своя» формула или тип преобразования, на котором он спотыкается. Фиксация таких моментов переводит их из области бессознательных ошибок в область осознанного контроля.

6. Контроль оформления

В тригонометрии отсутствие фразы «где $n \in \mathbb{Z}$ » или неверная скобка в интервале могут обнулить всё решение. При работе над ошибками сверяйте своё оформление с эталонными критериями ФИПИ.

Составитель: Педагогический совет преподавателей математики

Дата составления: 2026 год